На правах рукописи

Каримов Руслан Халикович

УБЫВАНИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2011

Работа выполнена в
ГОУ ВПО "Стерлитамакская государственная педагогическая академия им. Зайнаб Биишевой",
ГАНУ "Институт прикладных исследований"

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент Кожевникова Лариса Михайловна

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Рамазанов Марат Давидович

кандидат физико-математических наук, доцент Ушаков Владимир Игнатьевич

Ведущая организация: Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Защита состоится 24 февраля 2011 г. в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.018.10 при Казанском федеральном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37, НИИММ, ауд. 324.

С текстом диссертации можно ознакомиться в Научной библиотеке имени Н.И. Лобачевского Казанского федерального университета (г. Казань, ул. Кремлевская, 18).

Автореферат разослан "   " января 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук, доцент Липачев Е.К.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Поведение на бесконечности решений краевых и смешанных задач для линейных эллиптических и параболических уравнений в неограниченных областях хорошо изучено. Менее исследованной является эта задача для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений. Данное направление весьма обширно и включает в себя целый класс задач. В настоящей работе для квазилинейных эллиптических уравнений при удалении аргумента на бесконечность и для квазилинейных параболических уравнений при больших значениях времени исследована скорость убывания решений в зависимости от геометрии неограниченной области.

Изучением поведения на бесконечности решений линейных эллиптических уравнений занимались О.А. Олейник, Г.А. Иосифьян, Е.М. Ландис, Г.П. Панасенко, В.А. Кондратьев, И. Копачек, Д.М. Леквеишвили, О.А. Олейник, Ф.Х. Мукминов, Л.М. Кожевникова и др.

О.А. Олейник, Г.А. Иосифьян[1] установили оценки сверху скорости убывания на бесконечности решений краевой задачи для линейных эллиптических уравнений второго порядка в неограниченных областях. Л.М. Кожевникова[2] получила оценки решений задачи Дирихле для уравнений высокого порядка в более широком классе областей с некомпактными границами и доказала их точность для областей вращения в случае уравнений второго порядка. Для квазилинейных эллиптических уравнений исследования в этом направлении до сих пор не проводились.

А.К. Гущин положил начало изучению поведения решений смешанных задач с начальной функцией, ограниченной в одной из L_p - норм, для параболических уравнений в неограниченных областях. Для линейного параболического уравнения второго порядка в широком классе неограниченных областей в терминах простой геометрической характеристики (мера пересечения области Ω, лежащей в основании цилиндра, с шаром радиуса r) А.К. Гущиным[3] установлены точные оценки решений второй смешанной задачи.

[1]Олейник О.А. Иосифьян Г.А. О поведении на бесконечности решений эллиптического уравнения второго порядка в областях с некомпактной границей // Матем. сб. – 1980. – Т. 112(154). – №4(8). – С. 588-610.

[2]Кожевникова Л.М. Поведение на бесконечности решений псевдодифференциальных эллиптических уравнений в неограниченных областях // Матем. сб. – 2008. – Т. 199. – №8. – С. 61-94.

[3]Гущин А.К. Стабилизация решений второй краевой задачи для параболического уравнения второго порядка // Матем. сб. – 1976. – Т. 101(143). – №4(12). – С. 459-499.

Исследованию поведения решений смешанных задач для линейных параболических уравнений второго и высокого порядков при $t \to \infty$ посвящены работы А.В. Лежнева, В.И. Ушакова, Ф.Х. Мукминова, Л.М. Кожевниковой, И.М. Биккулова, В.Ф. Гилимшиной и др.

А.Ф. Тедеев[4] получил оценку сверху L_2-нормы решения первой смешанной задачи для параболического слабо нелинейного уравнения высокого порядка в дивергентной форме. Ранее, аналогичный результат для линейного параболического уравнения высокого порядка был установлен Ф.Х. Мукминовым[5]. Л.М. Кожевниковой, Ф.Х. Мукминовым[6] в более широком классе неограниченных областей для полулинейных параболических уравнений второго порядка получены оценки сверху и доказана их точность в классе областей вращения.

А.Ф. Тедеевым[7] для решения первой смешанной задачи в случае модельного квазилинейного параболического уравнения в дивергентной форме установлены оценки сверху, не зависящие от геометрии неограниченной области.

Следует отметить, что для квазилинейных параболических уравнений оценка, характеризующая зависимость скорости стабилизации решения первой смешанной задачи от геометрии неограниченной области, ранее не была установлена в общем виде.

Цель работы:

- исследование поведения на бесконечности решений задачи Дирихле для квазилинейных эллиптических уравнений в неограниченных областях Ω в зависимости от геометрии Ω;

- изучение зависимости поведения при больших значениях времени решений первой смешанной задачи для квазилинейных параболических уравнений второго порядка в цилиндрических областях $D = \{t > 0\} \times \Omega$ от неограниченной области Ω, лежащей в основании цилиндра.

[4]Тедеев А.Ф. Стабилизация решений первой смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения высокого порядка // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25. – №3. – С. 491-498.

[5]Мукминов Ф.Х. Об убывании нормы решения смешанной задачи для параболического уравнения высокого порядка // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23. – №10. – С. 1172-1180.

[6]Кожевникова Л.М., Мукминов Ф.Х. Оценки скорости стабилизации при $t \to \infty$ решения первой смешанной задачи для квазилинейной системы параболических уравнений второго порядка // Матем. сб. – 2000. – Т. 191. – №2. – С. 91-131.

[7]Тедеев А.Ф. Стабилизация решений начально-краевых задач для квазилинейных параболических уравнений // Укр. мат. журн. – 1992. – Т. 44. – №10. – С. 1441-1450.

Научная новизна. Основные научные результаты диссертации являются новыми и получены автором лично.

1. Для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка получены оценки скорости убывания на бесконечности решений задачи Дирихле с финитными данными в областях с некомпактными границами. В широком классе областей вращения впервые установлена точность этих оценок.

2. Для квазилинейных параболических уравнений второго порядка установлены оценки скорости стабилизации при больших значениях времени решений первой смешанной задачи с финитной начальной функцией и доказана их точность. Показано, что в квазилинейном случае убывание решений имеет степенной характер, в то время как в линейном случае может быть экспоненциальным.

Методика исследования. Для исследования поведения на бесконечности решений квазилинейных эллиптических и параболических уравнений второго порядка использован метод, который основывается на разбиении неограниченной области на ограниченные части. Выделение таких частей связано с построением точных оценок первого собственного значения соответствующего эллиптического оператора через геометрические характеристики области.

Точность оценок, характеризующих скорость убывания решений рассматриваемых задач, доказывается с помощью неравенства Гарнака.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Результаты могут быть использованы в качественной теории эллиптических и параболических уравнений. Разработанные в диссертации методы могут применяться при расчетах диффузионных и тепловых процессов.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались автором и обсуждались на семинаре по дифференциальным уравнениям кафедры математического анализа Стерлитамакской государственной педагогической академии, семинаре лаборатории дифференциальных уравнений Института прикладных исследований АН РБ, семинаре кафедры дифференциальных уравнений Башкирского государственного университета, семинаре кафедры дифференциальных уравнений Казанского федерального университета, а также на следующих научных конференциях: "Дифференциальные уравнения и их приложения" (Самара, 2007), "Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании" (Уфа, 2007), "Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна" (Воронеж, 2008), "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики" (Эльбрус, 2008), "Дифференциальные уравнения и смежные проблемы", посвященной 80-летию академика В.А. Ильина (Стерлитамак, 2008), "Математическое моделирование и краевые задачи" (Самара, 2010), "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике", посвященной 110-летию академика М.А. Лаврентьева (Новосибирск, 2010), "Лобачевские чтения – 2010", посвященная 50-летию механико-математического факультета Казанского университета (Казань, 2010).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1] – [11]. Из совместных работ [7]– [11] Л.М. Кожевниковой принадлежат постановки задач.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы, содержащего 81 наименование. Нумерация теорем, лемм, утверждений, предложений, следствий, замечаний, формул ведется отдельно в каждой главе. Общий объем диссертации — 104 страницы.

Автор выражает глубокую признательность и благодарность научному руководителю Л.М. Кожевниковой за предложенную тематику исследований, полезные замечания, постоянное внимание к работе и поддержку.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** даётся обзор литературы, формулируются постановки задач, приводятся основные результаты диссертации, а также кратко описывается содержание параграфов.

Прежде чем перейти к формулировке результатов диссертации введем некоторые обозначения. Через Ω будем обозначать область пространства $\mathbb{R}_n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\}, \quad n \geq 2$. Положим: $\|\cdot\|_{p,Q}$ — норма в пространстве $L_p(Q)$, причем значения $p = 2, \ Q = \Omega$ опускаются; $S = \{t > 0\} \times \partial\Omega$; $\Omega_{r_1}^{r_2} = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid r_1 < x_1 < r_2\}$, значения $r_1 = 0, \ r_2 = \infty$ могут опускаться; $\gamma_r = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid x_1 = r\}$.

Л.М. Кожевниковой[8] для областей с некомпактными границами предложено новое понятие, называемое λ-разбиением, которое позволяет получать точные оценки решений краевых задач для линейных эллиптических и параболических уравнений. Это понятие является обобщением понятия λ - последовательности, введенного ранее[9] для областей, расположенных вдоль выделенной оси Ox_1, где показано, что использование этой геометрической характеристики позволяет в ряде случаев устанавливать более сильные результаты, чем ранее известные. В настоящей работе техника λ-разбиений адаптирована на некоторый класс квазилинейных операторов.

Предполагается, что неограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}_n$ представлена в виде объединения $\Omega = \bigcup\limits_{N=0}^{\infty} \Omega^{(N)}$ последовательности вложенных $\Omega^{(N)} \subset \Omega^{(N+1)}$ ограниченных областей, удовлетворяющих следующим требованиям. Дополнения $\Omega^{(N)}_{(N-1)} = \Omega^{(N)} \setminus \overline{\Omega^{(N-1)}}$ распадаются на конечное число связных компонент $\omega_i^{(N)},\ i = \overline{1, p^{(N)}}:\ \Omega^{(N)}_{(N-1)} = \bigcup\limits_{i=1}^{p^{(N)}} \omega_i^{(N)},\ N = \overline{1, \infty}$. Пересечения $(\partial\Omega^{(N)}) \bigcap \Omega = S^{(N)},\ N = \overline{0, \infty}$, представляют собой конечное число липшицевых гиперповерхностей $S_i^{(N)} = \partial\omega_i^{(N)} \bigcap S^{(N)}$ ($S_i^{(N)} \neq \varnothing$ могут быть несвязными), $i = \overline{1, p^{(N)}},\ N = \overline{1, \infty}$.

Для множества $Q \subset \Omega$ введем обозначение

$$\lambda\{Q\} = \inf \left\{ \|\nabla g\|^{m+1}_{m+1,Q} \;\middle|\; g(\mathbf{x}) \in C_0^{\infty}(\Omega),\ \|g\|_{m+1,Q} = 1 \right\}.$$

Определим векторы $t^{(N)} = (t_1^{(N)}, ..., t_{p^{(N)}}^{(N)})$ и $\lambda^{(N)} = (\lambda_1^{(N)}, ..., \lambda_{p^{(N)}}^{(N)})$ формулами $t_i^{(N)} = \operatorname{dist}(S_i^{(N)}, \widetilde{S}_i^{(N-1)})$, где $\widetilde{S}_i^{(N-1)} = \partial\omega_i^{(N)} \cap S^{(N-1)} \neq \varnothing$, $\lambda_i^{(N)} = \lambda\{\omega_i^{(N)}\},\ i = \overline{1, p^{(N)}},\ N = \overline{1, \infty}$. Будем предполагать, что существует число $\theta > 0$ такое, что выполняются неравенства

$$1 \leq \theta \lambda_i^{(N)} (t_i^{(N)})^{m+1}, \quad i = \overline{1, p^{(N)}}, \quad N = \overline{1, \infty}. \tag{1}$$

Описанное выше представление $\Omega = \bigcup\limits_{N=0}^{\infty} \Omega^{(N)}$ при выполнении неравенств (1) будем называть λ-разбиением области Ω.

[8]Кожевникова Л.М. О существовании и единственности решений задачи Дирихле для псевдодифференциальных эллиптических уравнений в областях с некомпактными границами // Уфимский матем. журн. – 2009. – Т. 1. – №1. – С. 38-68.

[9]Кожевникова Л.М. Стабилизация решения первой смешанной задачи для эволюционного квазиэллиптического уравнения // Матем. сб. – 2005. – Т. 196. – №7. – С. 67-100.

Для неограниченных областей, расположенных вдоль выделенной оси Ox_1 (сечение γ_r не пусто при любом $r > 0$), множества $\Omega^{(N)} = \Omega^{z_N}$ можно определить с помощью неограниченной возрастающей последовательности положительных чисел $\{z_N\}_{N=0}^{\infty}$. При этом последовательность $\{z_N\}_{N=0}^{\infty}$ называется λ - последовательностью, а условие (1) для разбиения $\Omega = \bigcup\limits_{N=0}^{\infty} \Omega^{z_N}$ принимает вид

$$1 \leq \theta\lambda(z_{N-1}, z_N)\Delta_N^{m+1}, \ \Delta_N = z_N - z_{N-1}, \quad N = \overline{1, \infty}, \tag{2}$$

где $\lambda(r_1, r_2) = \lambda\{\Omega_{r_1}^{r_2}\}, \ r_1 < r_2$.

Глава I имеет вспомогательный характер, в §1.1 приводятся неравенства, используемые в последующих параграфах, в §§1.2, 1.3 установлены свойства и приведены примеры построения λ - последовательностей. По сути эти параграфы посвящены распространению результатов Л.М. Кожевниковой с линейного на квазилинейный случай.

Приведем необходимое и достаточное условие существования λ - последовательности:

$$\text{для любого } r_1 > 0 \text{ найдется } r_2 > r_1 \text{ такое, что } \lambda(r_1, r_2) > 0.$$

При этом λ-последовательность можно построить начиная с любого $z_0 > 0$.

Рассмотрим область вращения

$$\Omega(f) = \{(x_1, \mathbf{x}') \in \mathbb{R}_n \mid x_1 > 0, \ |\mathbf{x}'| < f(x_1)\} \tag{3}$$

с положительной функцией $f(x_1) < \infty$. От функции f требуется только, чтобы множество $\Omega(f)$ было областью.

Для областей вращения вида (3) приведем способ построения λ - последовательности. Неограниченную возрастающую последовательность положительных чисел $\{z_N\}_{N=0}^{\infty}$ назовем П-последовательностью функции f, если справедливы равенства

$$z_0 = 1, \quad z_N = \sup\left\{r \,\middle|\, \inf_{[z_{N-1}, r)} f(x) \geq r - z_{N-1}\right\}, \quad N = \overline{1, \infty}.$$

Эту последовательность назовем П - последовательностью функции f. Установлено, что П - последовательность функции f является λ - последовательностью для области $\Omega(f)$.

Если существует постоянная $\omega \geq 1$ такая, что

$$\sup\{f(z) \mid z \in [x - f(x), \, x + f(x)]\} \leq \omega f(x), \quad x \geq 1, \tag{4}$$

то справедливы неравенства

$$\omega^{-2}N \le \int\limits_1^{z_N} \frac{dx}{f(x)} \le N, \quad N = \overline{0,\infty},$$

$$\overline{\omega}^{-1} \le \frac{z_{N+1}-z_N}{z_N - z_{N-1}} \le \overline{\omega}, \quad \overline{\omega} = \omega^3, \quad N = \overline{1,\infty}. \tag{5}$$

Приведем результаты **главы II**, установленные для решений задачи Дирихле в случае квазилинейного эллиптического уравненийя второго порядка

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (a_\alpha(\mathbf{x}, \nabla u))_{x_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{n} (\Phi_\alpha(\mathbf{x}))_{x_\alpha}, \quad \mathbf{x} \in \Omega; \tag{6}$$

с однородным граничным условием

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{7}$$

Предположим, что функции, входящие в уравнение (6) удовлетворяют следующим требованиям. Функции $a_\alpha(\mathbf{x},\xi)$, $\alpha = \overline{1,n}$, измеримы по $\mathbf{x} \in \Omega$ и для всех $\xi, \eta \in \mathbb{R}_n$ при п.в. $\mathbf{x} \in \Omega$ подчиняются условиям:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left(a_\alpha(\mathbf{x},\xi) - a_\alpha(\mathbf{x},\eta)\right)(\xi_\alpha - \eta_\alpha) \ge \overline{a}|\xi-\eta|^{m+1}, \quad m \ge 1; \tag{8}$$

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x},\xi) - \mathbf{a}(\mathbf{x},\eta)| \le \widehat{a}|\xi-\eta|(|\xi|+|\eta|)^{m-1}, \quad \mathbf{a} = (a_1,\ldots,a_n); \tag{9}$$

$$a_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{0}) = 0, \quad \alpha = \overline{1,n}, \tag{10}$$

с положительными числами $\overline{a}$, $\widehat{a}$.

Очевидно, функции $a_\alpha(\xi) = |\xi|^{m-1}\xi_\alpha$, $\alpha = \overline{1,n}$, удовлетворяют условиям (8) – (10) и уравнение (6) принимает вид

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left(|\nabla u|^{m-1} u_{x_\alpha}\right)_{x_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{n} (\Phi_\alpha(\mathbf{x}))_{x_\alpha}.$$

В §2.1 доказаны существование и единственность обобщенного решения задачи (6), (7).

Далее, приведем результаты, характеризующие скорость убывания решения задачи (6), (7) на бесконечности в областях с некомпактными границами в зависимости от их геометрических свойств. Чтобы ограничить влияние вектор-функции $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = (\Phi_1(\mathbf{x}),\ldots,\Phi_n(\mathbf{x}))$ на поведение решения, будем считать, что $\mathbf{\Phi}$ имеет компактный носитель:

$$\operatorname{supp} \mathbf{\Phi} \subset \Omega^{(0)}. \tag{11}$$

В п. 2.2.1 получены оценки сверху решения задачи (6), (7).

Теорема 2.6. *Пусть для области* Ω *существует* λ*-разбиение* $\Omega = \bigcup\limits_{N=0}^{\infty} \Omega^{(N)}$ *и выполнено условие* (11). *Тогда найдутся положительные числа* κ_m $(\theta, \widehat{a}, \overline{a})$, $M_m(\theta, \widehat{a}, \overline{a}, \|\mathbf{\Phi}\|_{(m+1)/m})$ *такие, что для решения* $u(\mathbf{x})$ *задачи* (6), (7) *при* $N \geq 0$ *справедливы оценки*

$$\|\nabla u\|_{m+1,\Omega\setminus\Omega^{(N)}} \leq M_m \exp(-\kappa_m N), \tag{12}$$

$$\|u\|_{m+1,\Omega^{(N+1)}_{(N)}} \leq M_m \max_{\underline{i=1,p^{(N+1)}}} t_i^{(N+1)} \exp(-\kappa_m N). \tag{13}$$

Оценки (12), (13) зависят от представления $\Omega = \bigcup\limits_{N=0} \Omega^{(N)}$. Задача оптимизации λ - разбиения достаточно сложная и здесь не решалась, однако для λ - последовательностей этот вопрос рассмотрен. Для областей, расположенных вдоль оси Ox_1, в случае, когда разбиение осуществляется с помощью λ - последовательности $\{z_N\}_{N=0}^{\infty}$, оценки (12), (13) принимают вид

$$\|\nabla u\|_{m+1,\Omega_{z_N}} \leq M_m \exp(-\kappa_m N), \tag{12$'$}$$

$$\|u\|_{m+1,\Omega_{z_N}^{z_{N+1}}} \leq M_m \Delta_{N+1} \exp(-\kappa_m N). \tag{13$'$}$$

Установлено, что оптимальной является λ-последовательность с минимально возможными интервалами (z_{N-1}, z_N), при которых условия (2) не нарушаются. Если выполнено условие (4), то П-последовательность $\{z_N\}_{N=0}^{\infty}$ является оптимальной λ - последовательностью для области $\Omega(f)$.

Следствием теоремы 2.6 для областей вращения $\Omega(f)$ вида (3) с функцией f, удовлетворяющей условиям

$$\lim_{r\to\infty} \frac{f(r)}{r} = 0, \tag{14}$$

$$f(x) \geq 1, \quad x \geq 1, \tag{15}$$

является оценка

$$\|u\|_{m+1,\Omega_r^{r+1}(f)} \leq \widetilde{M}_m \exp\left(-\widetilde{\kappa}_m \int\limits_1^r \frac{dx}{f(x)}\right), \quad r \geq \widetilde{R}. \tag{16}$$

В области $\Omega(f^*)$ с функцией $f^*(x) = x^a$, $0 \leq a < 1$, $x > 0$, для решения задачи (6), (7) справедлива оценка

$$\|u\|_{m+1,\Omega_r^{r+1}(f^*)} \leq M_* \exp\left(-\kappa^* r^{1-a}\right), \quad r \geq R^*. \tag{16$_1$}$$

В области $\Omega(f^{**})$ с функцией $f^{**}(x) = e,\ 0 < x < e,\ f^{**}(x) = x/\ln x,\ x \geq e$, для решения задачи (6), (7) установлена оценка

$$\|u\|_{m+1,\Omega_r^{r+1}(f^{**})} \leq M^{**} \exp\left(-\kappa^{**} \ln^2 r\right), \quad r \geq R^{**}. \qquad (16_2)$$

В п. 2.2.2 для решения задачи (6), (7) получены оценки снизу, подтверждающие точность оценок (12′), (13′).

Теорема 2.7. *Пусть* Π *- последовательность* $\{z_N\}_{N=0}^{\infty}$ *функции* $f(x)$, $x > 0$, *удовлетворяет условию* (5) *и выполнено требование* (11). *Тогда для неотрицательного решения* $u(\mathbf{x})$ *задачи* (6), (7) *в области вращения* $\Omega(f)$ *существуют положительные числа* $K_m(\overline{\omega}, n, \widehat{a}, \overline{a}),\ \mu_m(n, \widehat{a}, \overline{a}, f, \mathbf{\Phi})$ *такие, что для* $N \geq 2$ *справедливы неравенства*

$$\|u\|_{m+1,\Omega_{z_N}^{z_{N+1}}(f)} \geq \mu_m \Delta_{N+1} \exp(-K_m N),$$

$$\|\nabla u\|_{m+1,\Omega_{z_N}(f)} \geq \mu_m \exp(-K_m N).$$

Кроме того, для неотрицательного решения $u(\mathbf{x})$ задачи (6), (7) в области вращения $\Omega(f)$ с функцией f, удовлетворяющей условию (4), получена оценка

$$\|u\|_{m+1,\Omega_r^{r+1}(f)} \geq \widetilde{\mu}_m \exp\left(-\widetilde{K}_m \int\limits_1^r \frac{dx}{f(x)}\right), \quad r \geq \widetilde{r}.$$

В частности, для неотрицательных решений задачи (6), (7) в областях $\Omega(f^*),\ \Omega(f^{**})$ справедливы неравенства

$$\|u\|_{m+1,\Omega_r^{r+1}(f^*)} \geq \mu^* \exp\left(-K^* r^{1-a}\right), \quad r \geq r^*,$$

$$\|u\|_{m+1,\Omega_r^{r+1}(f^{**})} \geq \mu^{**} \exp\left(-K^{**} \ln^2 r\right), \quad r \geq r^{**},$$

которые доказывают точность оценок (16_1), (16_2), соответственно.

Далее сформулируем результаты **главы III**, полученные для решения первой смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения второго порядка

$$u_t = \sum_{\alpha=1}^{n} (a_\alpha(t, \mathbf{x}, \nabla u))_{x_\alpha} - a(t, \mathbf{x}, u), \quad (t, \mathbf{x}) \in D; \qquad (17)$$

$$u(t, \mathbf{x})\Big|_S = 0; \qquad (18)$$

$$u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \varphi(\mathbf{x}) \in L_2(\Omega). \qquad (19)$$

Предполагается, что функции, входящие в уравнение (17), удовлетворяют следующим требованиям. Функции $a_\alpha(t, \mathbf{x}, \xi)$, $\alpha = \overline{1, n}$, измеримы по $(t, \mathbf{x}) \in D$ и для всех $\xi, \eta \in \mathbb{R}_n$ при п.в. $(t, \mathbf{x}) \in D$ подчиняются условиям:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (a_\alpha(t, \mathbf{x}, \xi) - a_\alpha(t, \mathbf{x}, \eta)) (\xi_\alpha - \eta_\alpha) \geq \overline{a}|\xi - \eta|^{m+1}, \quad m \geq 1; \tag{20}$$

$$|\mathbf{a}(t, \mathbf{x}, \xi) - \mathbf{a}(t, \mathbf{x}, \eta)| \leq \widehat{a}|\xi - \eta|(|\xi| + |\eta|)^{m-1}, \quad \mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n); \tag{21}$$

$$a_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{0}) = 0, \quad \alpha = \overline{1, n}. \tag{22}$$

Функция $a(t, \mathbf{x}, s)$ измерима по $(t, \mathbf{x}) \in D$ и для всех $s, r \in \mathbb{R}$ при п.в. $(t, \mathbf{x}) \in D$ подчиняется условиям:

$$(a(t, \mathbf{x}, s) - a(t, \mathbf{x}, r)) (s - r) \geq 0; \tag{23}$$

$$|a(t, \mathbf{x}, s) - a(t, \mathbf{x}, r)| \leq \widetilde{a}|s - r|(|s| + |r|)^{q_*-1}, \quad m \leq q_* \leq q, \quad q = m + \frac{2(m+1)}{n}; \tag{24}$$

$$a(t, \mathbf{x}, 0) = 0. \tag{25}$$

Здесь $\overline{a}$, $\widehat{a}$, $\widetilde{a}$ — положительные числа.

Очевидно, функции $a_\alpha(\xi) = |\xi|^{m-1}\xi_\alpha$, $\alpha = \overline{1, n}$, $a(s) = |s|^{q_*-1}s$ удовлетворяют условиям (20)–(25) и уравнение (17) принимает вид

$$u_t = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(|\nabla u|^{m-1} u_{x_\alpha}\right)_{x_\alpha} - |u|^{q_*-1}u. \tag{17$'$}$$

Следует отметить, что в случае $a(t, \mathbf{x}, u) \equiv 0$ уравнение (17) запишется в виде

$$u_t = \sum_{\alpha=1}^{n} (a_\alpha(t, \mathbf{x}, \nabla u))_{x_\alpha}. \tag{26}$$

В §3.1 доказаны существование и единственность обобщенного решения задачи (17)–(19).

В §3.2 установлены оценки $L_2(\Omega)$ - нормы решения задачи (17)– (19), характеризующие скорость убывания решения при $t \to \infty$.

А.Ф. Тедеевым[10] изучалась допустимая скорость стабилизации решения первой смешанной задачи для квазилинейного параболического

[10] Тедеев А.Ф. Стабилизация решений начально-краевых задач для квазилинейных параболических уравнений // Укр. мат. журн. – 1992. – Т. 44. – №10. – С. 1441-1450.

уравнения высокого порядка частного вида. С целью полноты изложения используя ту же методику в п. 3.2.1 для неотрицательного решения задачи (17′), (18), (19) с финитной неотрицательной функцией φ установлена оценка

$$\|u(t)\| \geq \|\varphi\| \left(C(\varphi)t+1\right)^{-1/(m-1)}, \quad t>0. \tag{27}$$

Заметим, что наилучшая скорость убывания решений $t^{-1/(m-1)}$ может достигаться в сужающихся неограниченных областях. Например, для решения задачи (17)–(19) в области $\Omega(f)$ с функцией $f(x)=x^{-a},\ a>1/(n-1),\ x>0$, справедлива оценка

$$\|u(t)\|_{\Omega(f)} \leq Mt^{-1/(m-1)}, \quad m>1, \quad t>0.$$

В п. 3.2.2 получены оценки сверху, характеризующие скорость убывания решения задачи (17)– (19) при $|\mathbf{x}| \to \infty$. Предполагается, что начальная функция имеет ограниченный носитель так, что

$$\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega^{(0)}. \tag{28}$$

Будем считать, что выполнено условие

$$\lambda^{(0)} = \lambda\left\{\Omega^{(0)}\right\} > 0. \tag{29}$$

Теорема 3.3. *Пусть для области Ω существует λ - разбиение $\Omega = \bigcup\limits_{N=0}^{\infty} \Omega^{(N)}$ и выполнено условие (28). Тогда найдутся положительные числа $\kappa_m(\overline{a},\widehat{a},\theta),\ M(m,\overline{a},\widehat{a},\theta)$ такие, что решение $u(t,\mathbf{x})$ задачи (17)– (19) при всех $t\geq 0,\ N\geq 0$, удовлетворяет оценке*

$$\|u(t)\|_{\Omega\setminus\Omega^{(N)}} \leq Me^{-\kappa_m N}\|\varphi\|.$$

Для $m\geq 1$ определим последовательность

$$F_m(N) = 1/\inf\left\{\|\nabla g\|^{m+1}_{m+1,\Omega^{(N)}} \;\middle|\; g(\mathbf{x})\in C_0^\infty(\Omega), \|g\|_{\Omega^{(N)}}=1\right\}, \quad N=\overline{0,\,\infty}.$$

Пусть $N_m(t), m>1,\ N_1(t)$ — произвольные неотрицательные функции, удовлетворяющие, соответственно, неравенствам

$$F_m(N_m(t))\exp(\kappa_m(m-1)N_m(t)) \geq t, \quad m>1, \quad t>0;$$

$$N_1(t)F_1(N_1(t)) \leq t, \quad t\geq 0.$$

Например, можно положить

$$N_m(t) = \min\left\{N \in \overline{0,\infty} \,\middle|\, F_m(N)\exp(\kappa_m(m-1)N) \geq t\right\}, \quad m > 1, \quad t \geq 0;$$

$$N_1(t) = \max\left\{N \in \overline{0,\infty} \,\middle|\, NF_1(N) \leq t\right\}, \quad t \geq 0.$$

Теорема 3.4. *Пусть для области* Ω *существует* λ*-разбиение* $\Omega = \bigcup\limits_{N=0}^{\infty} \Omega^{(N)}$ *и выполнены условия* (28), (29). *Тогда найдутся положительные числа* $k_1(\theta, \overline{a}, \widehat{a})$, $M_m(\theta, \overline{a}, \widehat{a}, \|\varphi\|)$ *такие, что для решения* $u(t, \mathbf{x})$ *задачи* (17)–(19) *справедливы оценки*

$$\textit{при} \quad m > 1 \quad \|u(t)\| \leq M_m t^{-1/(m-1)} F_m^{1/(m-1)}(N_m(t)), \quad t > 0, \tag{30}$$

$$\textit{при} \quad m = 1 \quad \|u(t)\| \leq M_1 \exp(-k_1 N_1(t)), \quad t \geq 0. \tag{31}$$

Заметим, что практически всегда можно устроить разбиение с выполнением условия: существует $b > 0$ такое, что

$$F_m(N) \leq C\exp(bN), \quad N \geq 0. \tag{32}$$

Если выполнено условие (32), то для $t > 0$ можно положить

$$\exp(N_m(t)) = t^{1/(b(m+1)+\kappa_m(m-1))}, \quad m > 1;$$

$$\exp(N_1(t)) = t^{1/(2b+\varepsilon)}, \quad \varepsilon \in (0,1),$$

и оценки (30), (31) принимают вид

$$\|u(t)\| \leq M_m t^{-\kappa_m/(b(m+1)+\kappa_m(m-1))}, \quad m > 1, \quad t > 0; \tag{33}$$

$$\|u(t)\| \leq M_1 t^{-k_1/(2b+\varepsilon)}, \quad m = 1, \quad t > 0. \tag{34}$$

Если определить множества $\Omega^{(N)} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_n \,|\, x_1 > 0,\ |\mathbf{x}| < 2^N\}$, $N = \overline{0,\infty}$, то $\Omega = \bigcup\limits_{N=0}^{\infty} \Omega^{(N)}$ является λ - разбиением полупространства $\mathbb{R}_n^+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_n \mid x_1 > 0\}$. При этом справедливы неравенства (32) и имеют место оценки (33), (34).

Если же выполнено условие

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\ln F_m(N)}{N} = 0, \tag{35}$$

то можно выбрать

$$\exp(N_m(t)) = t^{1/(\kappa_m(m-1))}, \quad m > 1, \quad t > 0, \tag{36}$$

и оценка (30) принимает вид

$$\|u(t)\|_{L_2(\Omega)} \le M_m t^{-(1-\varepsilon)/(m-1)}, \quad m>1, \quad \varepsilon \in (0,1), \quad t>0. \tag{37}$$

Выбор функции $N_m(t)$ формулой (36) является оптимальным, поскольку оценка (37) имеет показатель степени близкий к показателю $1/(m-1)$ оценки снизу (27).

Предположим далее, что функция f удовлетворяет условию:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\ln r} \int\limits_1^r \frac{dx}{f(x)} = \infty. \tag{38}$$

Очевидно, что требование (14) является достаточным для выполнения (38). Для областей вращения, удовлетворяющих условию (14), справедливо соотношение (35). Таким образом, для областей вращения, удовлетворяющих условию (14), выбор функции $N_m(t),\ m>1$, формулой (36) оправдан и справедлива оценка (37). Однако, для областей вращения можно получить более тонкие оценки.

Пусть $\mathcal{P}(\rho,z)=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}_2 \mid z\le x_1<z+\rho,\ 0<x_2<\rho\}$ — квадрат со стороной ρ и левой нижней вершиной в точке z оси абсцисс. Для положительной функции $f(x_1),\ x_1>0$, символ $\Gamma_1^r(f)$ будет обозначать криволинейную трапецию

$$\Gamma_1^r(f)=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}_2 \mid 1\le x_1<r,\ 0<x_2<f(x_1)\}.$$

Через $\rho_*(r)$ обозначим сторону наибольшего квадрата $\mathcal{P}(\rho_*,\ z_*)$, содержащегося в $\Gamma_1^r(f)$.

Определим функцию $r_1(t),\ t\ge 0$, равенством

$$\int\limits_1^{r_1} \frac{dx}{f(x)} = \frac{t}{\rho_*^2(r_1)}. \tag{39}$$

Ввиду возрастания функции $\rho_*^2(r)\int\limits_1^r \frac{dx}{f(x)},\ r\ge 1$, равенство (39) однозначно определяет монотонно возрастающую функцию $r_1(t),\ t\ge 0$.

Следствием теоремы 3.4 для областей вращения вида (3) являются следующие оценки

$$npu \quad m>1 \quad \|u(t)\| \le \widetilde{M}_m t^{-1/(m-1)} g_m(t), \quad t\ge 1; \tag{40}$$

$$\textit{при} \quad m=1 \quad \|u(t)\| \leq \widetilde{M}_1 \exp\left(-\widetilde{k}_1 \int\limits_1^{r_1(t)} \frac{dx}{f(x)}\right), \quad t \geq 0, \tag{41}$$

где функция $g_m(t)$ растет медленнее любой степенной функции $t^\gamma, \gamma > 0$.

В области $\Omega(f^*)$ для решения задачи (17)– (19) оценки (40), (41) принимают вид

$$\begin{gathered} \|u(t)\|_{\Omega(f^*)} \leq M_m^* t^{-1/(m-1)} (\ln t)^{\chi/(1-a)}, \quad m > 1, \quad t \geq e, \\ \chi = a\frac{m+1}{m-1} + a\frac{n-1}{2} + \frac{1}{2}; \end{gathered} \tag{40_1}$$

$$\|u(t)\|_{\Omega(f^*)} \leq \widetilde{M}_1^* \exp\left(-k_1^* t^{\frac{1-a}{1+a}}\right), \quad m = 1, \quad t \geq 0. \tag{41_1}$$

В области $\Omega(f^{**})$ для решения задачи (17)– (19) оценки (40), (41) принимают вид

$$\begin{gathered} \|u(t)\|_{\Omega(f^{**})} \leq M_m^{**} t^{-1/(m-1)} (\ln t)^{-\sigma/2} \exp\left(\varrho (\ln t)^{1/2}\right), \quad m > 1, \quad t \geq e, \\ \sigma = \frac{m+1}{m-1} + \frac{n-1}{2}, \quad \varrho > 0; \end{gathered} \tag{40_2}$$

$$\|u(t)\|_{\Omega(f^{**})} \leq M_1^{**} \exp\left(-k_1^{**} (\ln t)^2\right), \quad m = 1, \quad t \geq 1. \tag{41_2}$$

В п. 3.2.3 для широкого класса областей вращения доказана точность полученных оценок для уравнения (26) при $m = 1$.

Теорема 3.5. *Пусть* Π - *последовательность* $\{z_N\}_{N=0}^\infty$ *положительной функции* $f(x)$, $x > 0$, *подчиняется неравенствам* (5). *Тогда для неотрицательного решения* $u(t, \mathbf{x})$ *задачи* (26), (18), (19) *при* $m = 1$ *в области* $D(f) = \{t > 0\} \times \Omega(f)$ *существуют положительные числа* $t_1(f)$, $K_1(f, n, \widehat{a}, \overline{a})$, $\mu_1\ (\widehat{a}, \overline{a}, f, n, \varphi)$ *такие, что при* $t \geq t_1$ *справедливо неравенство*

$$\|u(t)\|_{\Omega(f)} \geq \mu_1 \exp\left(-K_1 N_1(t)\right).$$

Из теоремы 3.5 следует, что оценка (31) для неотрицательного решения задачи (26), (18), (19) при $m = 1$ в области $D(f)$ для широкого класса областей вращения $\Omega(f)$ является точной.

Кроме того, для неотрицательного решения $u(t, \mathbf{x})$ задачи (26), (18), (19) при $m = 1$ в области $D(f)$ с функцией f, подчиняющейся условиям (4), (38) установлена оценка

$$\|u(t)\|_{\Omega(f)} \geq \widetilde{\mu}_1 \exp\left(-\widetilde{K}_1 \int\limits_1^{r_1(t)} \frac{dx}{f(x)}\right), \quad t \geq \widetilde{t}_1,$$

доказывающая точность оценки (41).

В частности, для неотрицательных решений $u(t, \mathbf{x})$ задачи (26), (18), (19) при $m = 1$ в областях $D(f^*)$, $D(f^{**})$ справедливы неравенства

$$\|u(t)\|_{\Omega(f^*)} \geq \mu_1^* \exp\left(-K_1^* t^{\frac{1-a}{1+a}}\right), \quad t \geq t^*,$$

$$\|u(t)\|_{\Omega(f^{**})} \leq \mu_1^{**} \exp\left(-K_1^{**} (\ln t)^2\right), \quad t \geq t^{**},$$

доказывающие точность оценок (41_1), (41_2), соответственно.

Публикации по теме диссертации

[1] *Каримов Р.Х.* Поведение на бесконечности решений квазилинейного эллиптического уравнения в неограниченной области // Тезисы докладов международной конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения". – Самара: Из-во "Универс групп", 2007. – С. 65-66.

[2] *Каримов Р.Х.* Стабилизация решений первой смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения второго порядка // Тезисы докладов Всероссийской школы-конференции для студентов и молодых ученых "Фундаментальная математика и ее приложения в естесствознаниии". – Уфа: РИО БашГУ, 2007. – С. 23-24.

[3] *Каримов Р.Х.* Поведение при больших значениях времени первой смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения второго порядка // Тезисы докладов Воронежской зимней математической школы С.Г. Крейна. – Воронеж: ВорГУ, 2008. – С. 64-66.

[4] *Каримов Р.Х.* Поведение при больших значениях времени первой смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения второго порядка // Труды Воронежской зимней математической школы С.Г Крейна. – Воронеж: ВорГУ, 2008. – С. 143-152.

[5] *Каримов Р.Х.* Теоремы существования и единственности задачи Дирихле для квазилинейного эллиптического уравнения в неограниченной области // Материалы Международного Российско-Азербайджанского симпозиума "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики". – Эльбрус: КБГУ, 2008. – С. 212-213.

[6] *Каримов Р.Х.* Поведение на бесконечности решений квазилинейных эллиптических уравнений в областях с некомпактной границей // Труды международной научной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные проблемы". – Уфа: Гилем, 2008. – С.116-120.

[7] *Каримов Р.Х., Кожевникова Л.М.* Стабилизация решений квазилинейных параболических уравнений в неограниченных областях // Седьмая Всероссийская научная конференция с международным участием "Математическое моделирование и краевые задачи". – Самара: СамГТУ, 2010. – С. 140-143.

[8] *Каримов Р.Х., Кожевникова Л.М.* Поведение на бесконечности решений квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка в неограниченных областях // Уфимск. матем. журн. – 2010. – Т. 2. – №2. – С. 53-66.

[9] *Каримов Р.Х., Кожевникова Л.М.* Убывание решений квазилинейного параболического уравнения в областях с некомпактными границами // Труды Международной конференции "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике", посвященная 110-летию академика М. А. Лаврентьева. – Новосибирск: Институт гидродинамики, 2010. С. 29-30.

[10] *Каримов Р.Х., Кожевникова Л.М.* Стабилизация решений квазилинейных параболических уравнений второго порядка в областях с некомпактными границами // Матем. сб. – 2010. – Т. 201. – №9. – С. 3-26.

[11] *Каримов Р.Х., Кожевникова Л.М.* Точные оценки решений квазилинейных эллиптических уравнений в неограниченной области // Труды международной молодежной научной конференции "Лобачевские чтения – 2010". – Казань: КГУ, 2010. – С. 160-164.

Подписано в печать
Формат $60 \times 84_{1/16}$.
Гарнитура "Times".
Печать оперативная.
Усл. печ. л. 1,00.
Тираж 100 экз.
Заказ №
Отпечатано в типографии
Стерлитамакской государственной
педагогической академии
им. Зайнаб Биишевой:
453103, г. Стерлитамак, пр. Ленина, 49.